

XÁC SUẤT ỨNG DỤNG

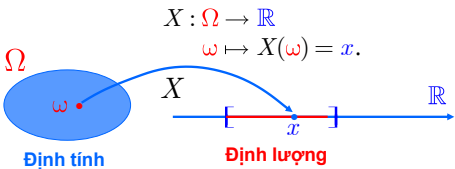
Chương II. BIẾN NGẪU NHIÊN

- Bài 1. Biến ngẫu nhiên
- Bài 2. Hàm phân phối xác suất
- Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

Bài 1. Biến ngẫu nhiên

1.1. Khái niệm biến ngẫu nhiên

Xét một phép thử với không gian biến cố sơ cấp Ω .
Biến ngẫu nhiên X là một ánh xạ



Bài 1. Biến ngẫu nhiên

1.1. Khái niệm biến ngẫu nhiên

- Nếu tập giá trị $X(\omega) \mid \omega \in \Omega$ của X chứa các phần tử riêng lẻ hữu hạn hay đếm được thì ta gọi X là **biến ngẫu nhiên rời rạc**.
Đặt $X(\omega_i) = x_i \ (i = 1, 2, \dots)$, ta ký hiệu $X = \{x_1, x_2, \dots\}$.
- Nếu tập giá trị $X(\omega) \mid \omega \in \Omega$ lấp đầy một khoảng trên trục số thì ta gọi X là **biến ngẫu nhiên liên tục**.
- $Y = \varphi(X)$ được gọi là **hàm của biến ngẫu nhiên** X và Y cũng là một biến ngẫu nhiên.

Bài 1. Biến ngẫu nhiên và hàm mật độ

1.1. Khái niệm biến ngẫu nhiên

VD 1. Một hộp chứa 3 lá thăm màu đỏ và 2 lá thăm màu đen. Một người bốc lần lượt 2 lá thăm từ hộp đó. Nếu bốc được lá thăm đỏ thì được thưởng 100 ngàn đồng; nếu bốc lá thăm đen thì bị phạt 70 ngàn đồng.

Gọi A_i : “bốc được lá thăm đỏ lần thứ i ” ($i = 1, 2$),
 X là số lá thăm đỏ bốc được và Y là số tiền có được.

- Không gian mẫu là $\Omega = \{A_1A_2, \bar{A}_1A_2, A_1\bar{A}_2, \bar{A}_1\bar{A}_2\}$.
- X là biến ngẫu nhiên và $X = \{0; 1; 2\}$.
- $Y = 100X - 70(2 - X)$ (ngàn đồng) là hàm của X và $Y = \{-140; 30; 200\}$.

Bài 1. Biến ngẫu nhiên

1.2. Bảng phân phối xác suất

Xét BNN $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$ với xác suất tương ứng là $P(X = x_i) = p_i$ ($i = 1, 2, \dots$).

Ta định nghĩa

- Bảng phân phối xác suất của X là

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$\dots$

Bài 1. Biến ngẫu nhiên

1.2. Bảng phân phối xác suất

Tính chất

- $p_i \geq 0$; $\sum p_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots$)
- Nếu $x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ thì $P(X = x) = 0$
- $P(a < X \leq b) = \sum_{a < x_i \leq b} p_i$

Bài 1. Biến ngẫu nhiên

1.2. Bảng phân phối xác suất

VD 2. Cho BNN rời rạc X có bảng phân phối xác suất

X	-1	0	1	3	5
P	$3a$	a	0,1	$2a$	0,3

- 1) Tìm a và tính $P(-1 < X \leq 3)$.
- 2) Lập bảng phân phối xác suất của hàm $Y = X^2$.

Bài 1. Biến ngẫu nhiên

1.2. Bảng phân phối xác suất

VD 3. Một xạ thủ có 4 viên đạn, bắn lần lượt từng viên vào một mục tiêu một cách độc lập. Xác suất trúng mục tiêu ở mỗi lần bắn là 0,8. Hãy lập bảng phân phối xác suất các biến ngẫu nhiên sau:

- a) Biến ngẫu nhiên X là số viên đạn bắn trúng mục tiêu.
- b) Nếu có 1 viên trúng mục tiêu hoặc hết đạn thì dừng. Gọi biến ngẫu nhiên Y là số viên đạn xạ thủ đã bắn.

Bài 1. Biến ngẫu nhiên

1.2. Bảng phân phối xác suất

VD 4. Một hộp có 3 viên phần trắng và 2 viên phần đỏ. Một người lấy ngẫu nhiên mỗi lần 1 viên (không trả lại) từ hộp đó ra *cho đến khi lấy được 2 viên phần đỏ*. Gọi X là số lần người đó lấy phần. Hãy lập bảng phân phối xác suất của X ?

Bài 1. Biến ngẫu nhiên

1.3. Hàm mật độ

Hàm số $f(x)$ không âm, xác định trên $\mathbb{R}$ được gọi là **hàm mật độ** của biến ngẫu nhiên liên tục X nếu

$$P(X \in A) = \int_A f(x)dx, \forall A \subset \mathbb{R}$$

Tính chất. $f(x)$ là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên liên tục của X khi và chỉ khi

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Nhận xét

$$P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b).$$

Bài 1. Biến ngẫu nhiên

1.3. Hàm mật độ

Chú ý

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty).$$

$$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x).$$

Bài 1. Biến ngẫu nhiên

VD 5. Chứng tỏ $f(x) = \begin{cases} 4x^3, & x \in [0;1] \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases}$ là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X và tính $P(0,5 \leq X < 3)$?

Bài 1. Biến ngẫu nhiên

VD 6. Cho BNN X có hàm mật độ $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \frac{k}{x^2}, & x \geq 2. \end{cases}$
Tính $P(-3 < X < 5)$?

Bài 2. HÀM PHÂN PHỐI XÁC SUẤT

2.1. Định nghĩa

Hàm phân phối xác suất (hay hàm phân phối tích lũy) của biến ngẫu nhiên X , ký hiệu $F(x)$, là xác suất để X nhận *giá trị nhỏ hơn x* với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Nghĩa là

$F(x) = P(X < x), \forall x \in \mathbb{R}$

Bài 2. Hàm phân phối xác suất

2.1. Định nghĩa

Nhận xét 1

- Nếu biến ngẫu nhiên X là rời rạc có phân phối xác suất $P(X = x_i) = p_i$ thì

$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$

- Nếu biến ngẫu nhiên X là liên tục có hàm mật độ $f(x)$ thì

$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

Bài 2. Hàm phân phối xác suất

2.1. Định nghĩa

Nhân xét 2

Giả sử biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận các giá trị trong $[x_1; x_n]$ ($x_1 < x_2 < \dots < x_n$) và có phân phối xác suất $P(X = x_i) = p_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Bài 2. Hàm phân phối xác suất

2.1. Định nghĩa

Ta có hàm phân phối xác suất của X là

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \leq x_1 \\ p_1 & \text{khi } x_1 < x \leq x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{khi } x_2 < x \leq x_3 \\ \dots & \dots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} & \text{khi } x_{n-1} < x \leq x_n \\ 1 & \text{khi } x_n < x. \end{cases}$$

Bài 2. Hàm phân phối xác suất

2.1. Định nghĩa

Quy ước

Nếu BNN X liên tục thì miền xác định của $F(x)$ được lấy theo hàm mật độ $f(x)$.

- Nếu BNN X có hàm mật độ $f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in [a; b] \\ 0, & x \notin [a; b] \end{cases}$

thì

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < a \\ \int_a^x \varphi(t)dt & \text{khi } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{khi } b < x. \end{cases}$$

Bài 2. Hàm phân phối xác suất

2.1. Định nghĩa

• Nếu BNN X có hàm mật độ $f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \varphi(x), & x \geq a \end{cases}$

thì $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < a \\ \int_a^x \varphi(t)dt & \text{khi } x \geq a. \end{cases}$

Bài 2. Hàm phân phối xác suất

2.1. Định nghĩa

• Nếu BNN X có hàm mật độ $f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}$

thì $F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^x \varphi(t)dt & \text{khi } x \leq a \\ 1 & \text{khi } x > a. \end{cases}$

Bài 2. Hàm phân phối xác suất

2.1. Định nghĩa

VD 1. Cho BNN X có bảng phân phối xác suất là

X	-2	1	3	4
P	0,1	0,2	0,2	0,5

Lập hàm phân phối xác suất $F(x)$ của X .

Giải. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \leq -2 \\ 0,1 & \text{khi } -2 < x \leq 1 \\ 0,3 & \text{khi } 1 < x \leq 3 \\ 0,5 & \text{khi } 3 < x \leq 4 \\ 1 & \text{khi } 4 < x. \end{cases}$

Bài 2. Hàm phân phối xác suất

2.1. Định nghĩa

VD 2. BNN X có hàm mật độ $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0; 1] \\ 3x^2, & x \in [0; 1]. \end{cases}$

Tìm hàm phân phối xác suất $F(x)$ của X .

Giải.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x 3t^2 dt, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

Bài 2. Hàm phân phối xác suất

2.1. Định nghĩa

VD 3. BNN X có hàm mật độ $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 100 \\ \frac{100}{x^2}, & x \geq 100. \end{cases}$

Tìm hàm phân phối xác suất $F(x)$ của X .

Giải.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 100 \\ 100 \int_{100}^x \frac{dt}{t^2}, & x \geq 100 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 100 \\ \frac{x - 100}{x}, & x \geq 100 \end{cases}$$

Bài 2. Hàm phân phối xác suất

2.2. Tính chất của hàm phân phối xác suất

- 1) Hàm $F(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- 2) $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}; F(-\infty) = 0; F(+\infty) = 1$.
- 3) $F(x)$ không giảm và liên tục trái tại mọi $x \in \mathbb{R}$.
Đặc biệt, với X liên tục thì $F(x)$ liên tục $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 4) $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a), \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Bài 2. Hàm phân phối xác suất

2.2. Tính chất của hàm phân phối xác suất

Đặc biệt

• Nếu X là BNN rời rạc thì

$$p_i = F(x_{i+1}) - F(x_i), \forall i$$

• Nếu X là BNN liên tục có hàm mật độ $f(x)$ thì

$$F'(x) = f(x)$$

Bài 2. Hàm phân phối xác suất

2.2. Tính chất của hàm phân phối xác suất

VD 4. Tính xác suất $P(X \geq 400)$ trong VD 3.

Giải. Ta có $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 100 \\ \frac{x - 100}{x}, & x \geq 100 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(X \geq 400) &= P(400 \leq X < +\infty) \\ &= F(+\infty) - F(400) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Bài 2. Hàm phân phối xác suất

2.2. Tính chất của hàm phân phối xác suất

VD 5. X có hàm mật độ $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{28}x^2, & x \in [-1; 3] \\ 0, & x \notin [-1; 3]. \end{cases}$

Hàm phân phối xác suất của X là:

$$\text{A. } F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{x^3}{28}, & -1 \leq x \leq 3 \\ 1, & 3 < x. \end{cases} \quad \text{B. } F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{x^3}{28}, & -1 \leq x < 3 \\ 1, & 3 \leq x. \end{cases}$$

Bài 2. Hàm phân phối xác suất

2.2. Tính chất của hàm phân phối xác suất

VD 5. X có hàm mật độ $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{28}x^2, & x \in [-1; 3] \\ 0, & x \notin [-1; 3]. \end{cases}$

Hàm phân phối xác suất của X là:

$$C. F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{x^3}{28} - \frac{1}{28}, & -1 \leq x \leq 3 \\ 1, & 3 < x. \end{cases}$$

$$D. F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{x^3}{28} + \frac{1}{28}, & -1 \leq x \leq 3 \\ 1, & 3 < x. \end{cases}$$

Bài 2. Hàm phân phối xác suất

2.2. Tính chất của hàm phân phối xác suất

VD 6. BNN X có hàm $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ ax^3 + 2b, & x \in (-2; 3] \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

- 1) Tìm các hằng số a và b ?
- 2) Tính $P\left(\sqrt{2} < Y \leq \sqrt{5}\right)$ với $Y = \sqrt{X^2 + 1}$.

Giải. Do $F(x)$ liên tục tại mọi $x \in \mathbb{R}$, nên:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} F(x) = F(-2) \Rightarrow -8a + 2b = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} F(x) = F(3) \Rightarrow 27a + 2b = 1 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có: $a = \frac{1}{35}$ và $b = \frac{4}{35}$.

Bài 2. Hàm phân phối xác suất

2.2. Tính chất của hàm phân phối xác suất

$$2) P\left(\sqrt{2} < Y \leq \sqrt{5}\right) = P\left(\sqrt{2} < \sqrt{X^2 + 1} \leq \sqrt{5}\right)$$
$$= P\left(-2 \leq X < -1\right) + P\left(1 < X \leq 2\right)$$
$$= \left[F(-1) - F(-2)\right] + \left[F(2) - F(1)\right] = \frac{14}{35}.$$

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.1. Mode

3.2. Kỳ vọng

3.2.1. Định nghĩa

3.2.2. Ý nghĩa của Kỳ vọng

3.2.3. Kỳ vọng của hàm của biến ngẫu nhiên

3.3. Phương sai

3.3.1. Định nghĩa

3.3.2. Ý nghĩa của Phương sai

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.1. Mode

Mode của BNN X , ký hiệu $\text{Mod } X$, là giá trị $x_0 \in X$ thỏa mãn:

- $\max_{x \in X} P(X = x) = P(X = x_0)$ nếu X là rời rạc, và
- $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(x_0)$ nếu X liên tục có hàm mật độ $f(x)$.

Chú ý

- Mod X còn được gọi là **giá trị tin chắc nhất** của X .
- Biến ngẫu nhiên X có thể có nhiều Mod X .

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.1. Mode

VD 1. Cho BNN X có bảng phân phối xác suất:

X	0	1	2	4	5	8
P	0,10	0,20	0,30	0,05	0,25	0,10

Mod $X = 2$

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.1. Mode

VD 2. Tìm Mod X , biết X có bảng phân phối xác suất:

X	1	2	4	5	8
P	$1 - 3p$	0,18	0,07	0,25	p

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.1. Mode

VD 3. Tìm Mod X , biết X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{64}x^2(4 - x), & x \in [0; 4] \\ 0, & x \notin [0; 4]. \end{cases}$$

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.2. KỲ VỌNG

3.2.1. Định nghĩa

Kỳ vọng của BNN X , ký hiệu EX hay $M(X)$, là một số thực được xác định như sau

- Nếu X là rời rạc với xác suất $P(X = x_i) = p_i$ thì

$$EX = \sum_i x_i p_i$$

- Nếu X là liên tục có hàm mật độ $f(x)$ thì

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$$

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.2. KỲ VỌNG

3.2.1. Định nghĩa

VD 4. Cho BNN X có bảng phân phối xác suất

X	-1	0	2	3
P	0,1	0,2	0,4	0,3

Tính kỳ vọng của X ?

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.2. KỲ VỌNG

3.2.1. Định nghĩa

VD 5. Một lô hàng có 10 sản phẩm tốt và 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 4 sản phẩm từ lô hàng đó, gọi X là số sản phẩm tốt trong 4 sản phẩm lấy ra. Tìm phân phối xác suất và tính kỳ vọng của X ?

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.2. KỲ VỌNG

3.2.1. Định nghĩa

VD 6. Tìm kỳ vọng của BNN X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x^2 + 2x), & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1]. \end{cases}$$

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.2. KỲ VỌNG

3.2.1. Định nghĩa

VD 7. Tìm kỳ vọng của BNN X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} e^{kx}, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.2. KỲ VỌNG

3.2.1. Định nghĩa

VD 8. Cho BNN X có bảng phân phối xác suất

X	1	2	4	5	7
P	a	0,2	b	0,2	0,1

Tìm giá trị của tham số a và b để $EX = 3,5$?

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.2. KỲ VỌNG

3.2.1. Định nghĩa

VD 9. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1]. \end{cases}$$

Cho biết $EX = 0,6$ hãy tính $P(X < 0,5)$?

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.2. KỲ VỌNG

3.2.2. Tính chất của Kỳ vọng

- 1) $EC = C, C \in \mathbb{R}.$
- 2) $E(CX) = C.EX, C \in \mathbb{R}.$
- 3) $E(X \pm Y) = EX \pm EY.$
- 4) $E(X.Y) = EX.EY$ nếu X, Y độc lập.

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.2. KỲ VỌNG

3.2.2. Tính chất của kỳ vọng

VD 10. Cho hai BNN X, Y độc lập có bảng ppxs:

X	-1	1	3
P	0,3	0,1	0,6

Y	-1	2
P	0,6	0,4

Tính $E(X^2.Y - 3XY + 5Y + 7).$

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.2. KỲ VỌNG

3.2.3. Ý nghĩa kỳ vọng

- Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X là *giá trị trung bình* (tính theo xác suất) mà X nhận được, nó phản ánh giá trị trung tâm phân phối xác suất của X .
- Trong thực tế sản xuất hay kinh doanh, khi cần chọn phương án cho *năng suất* hay *lợi nhuận* cao, người ta thường chọn phương án sao cho *kỳ vọng năng suất* hay *kỳ vọng lợi nhuận* cao.

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.2. KỶ VỌNG

3.2.3. Ý nghĩa kỳ vọng

VD 11. Thống kê cho biết tỉ lệ tai nạn xe máy ở thành phố H là 0,001. Công ty bảo hiểm A bán loại bảo hiểm tai nạn xe máy ở thành phố H cho người mua trong 1 năm với số tiền chi trả là 10 (triệu đồng), phí bảo hiểm là 0,1 (triệu đồng). Hỏi công ty A lãi trung bình bao nhiêu khi bán bảo hiểm trên?

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

VD 12. Ông A tham gia một trò chơi đỏ, đen như sau: Trong một hộp có 4 bi đỏ và 6 bi đen. Mỗi lần ông A lấy ra 1 bi; nếu là đỏ thì được thưởng 100 (ngàn đồng), nếu là đen thì bị mất 70 (ngàn đồng). Hỏi trung bình mỗi lần lấy bi ông A bị mất bao nhiêu tiền?

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

VD 13. Người thợ chép tranh mỗi tuần chép hai bức tranh độc lập A và B với xác suất hỏng tương ứng là 0,03 và 0,05. Nếu thành công thì người thợ sẽ kiếm lời từ bức tranh A là 1,3 triệu đồng và B là 0,9 triệu đồng, nhưng nếu hỏng thì bị lỗ do bức tranh A là 0,8 triệu đồng và do B là 0,6 triệu đồng. Hỏi trung bình người thợ nhận được bao nhiêu tiền chép tranh mỗi tuần?

- A. 2,185 triệu đồng; B. 2,148 triệu đồng.
- C. 2,116 triệu đồng; D. 2,062 triệu đồng.

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

VD 14. Một công ty có dự án kinh doanh 3 sản phẩm với 2 phương án lợi nhuận thu được như sau:

- Phương án A:		SP1	SP2	SP3
	Lợi nhuận (triệu)	200	300	250
	Khả năng	35%	20%	45%
- Phương án B:		SP1	SP2	SP3
	Lợi nhuận (triệu)	230	320	180
	Khả năng	32%	18%	50%

Theo các bạn thì chúng ta nên triển khai kinh doanh theo phương án nào?

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

VD 15. Bệnh nhân bị sỏi túi mật có thể có hai phác đồ: phẫu thuật túi mật hay điều trị bảo tồn. Việc điều trị bảo tồn lại có thể diễn tiến theo các tình huống có vọng trị tử vong và xác suất xảy ra tương ứng các trường hợp: ổn định không triệu chứng ($v_t = 0$; $x_s = 0,815$), bị đau quặn mật ($v_t = 0,004$; $x_s = 0,15$), biến chứng nhiễm trùng ($v_t = 0,13$; $x_s = 0,03$), bị ung thư túi mật ($v_t = 1$; $x_s = 0,005$). Việc điều trị phẫu thuật có giá trị tử vong là 0,004 với xác suất là 1. Hỏi nên điều theo phác đồ nào?

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

VD 16. Một cửa hàng điện máy lời 2,3 triệu đồng khi bán được 1 máy giặt, nhưng nếu máy giặt bị hỏng trước thời hạn bảo hành thì bị lỗ 4,5 triệu. Biết rằng cửa hàng lời trung bình 1,96 triệu đồng khi bán được 1 máy giặt. Tính tỉ lệ máy giặt phải bảo hành ?

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

VD 17. Nhu cầu hàng ngày của một khu phố về 1 loại thực phẩm tươi sống có bảng phân phối xác suất

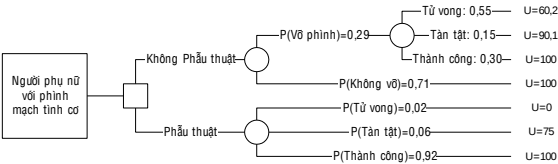
Nhu cầu (kg)	31	32	33	34
P	0,15	0,25	0,45	0,15

Một cửa hàng trong khu phố nhập về mỗi ngày 34 kg loại thực phẩm này với giá 25.000 đồng/kg và bán ra với giá 40.000 đồng/kg. Nếu bị ế, cuối ngày cửa hàng phải hạ giá còn 15.000 đồng/kg mới bán hết. Giả sử cửa hàng luôn bán hết hàng, tính tiền lời trung bình của cửa hàng này về loại thực phẩm trên trong 1 ngày ?

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

VD 18. Một bệnh nhân nữ 45 tuổi được phát hiện phình mạch một cách tình cờ. Người này có hai lựa chọn: hoặc là phẫu thuật với các khả năng là tử vong, tàn tật hay thành công hoặc không phẫu thuật với các khả năng bị vỡ phình mạch hoặc không bị vỡ phình mạch. Cây quyết định cho bệnh nhân này được trình bày trong hình sau (giá trị ghi ở tận cùng là giá trị lợi ích của tình huống):

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên



Hãy lựa chọn giải pháp điều trị phù hợp cho bệnh nhân.

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

VD 19. Một công ty bảo hiểm H nhận được một đơn hàng cần mua bảo hiểm về việc tiếp thị một sản phẩm mới của công ty A. Việc tiếp thị sản phẩm này có 2 rủi ro sau:

- Rủi ro nặng thì công ty A phải chịu một khoản lỗ là 80.000 USD;
- Rủi ro nhẹ thì công ty A chịu một khoản lỗ 25.000 USD.

Kết quả nghiên cứu thị trường cho biết việc tiếp thị sản phẩm này gặp rủi ro nặng là 0,01 và gặp rủi ro nhẹ là 0,05. Công ty bảo hiểm muốn mức lãi trung bình cho sản phẩm này là 2000 USD thì mức phí bảo hiểm cần bán là bao nhiêu?

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.2.4. Kỳ vọng của hàm của biến ngẫu nhiên

Giả sử $Y = \varphi(X)$ là hàm của biến ngẫu nhiên X .

- Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc thì

$$EY = \sum_i y_i \cdot p_i = \sum_i \varphi(x_i) \cdot p_i$$

- Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục thì

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x) dx$$

Chú ý

Khi biến ngẫu nhiên X là rời rạc thì ta nên lập bảng phân phối xác suất của Y , rồi tính EY .

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.2.4. Kỳ vọng của hàm của biến ngẫu nhiên

VD 16. Cho BNN X có bảng phân phối xác suất

X	-1	0	1	2
P	0,1	0,3	0,35	0,25

Tính EY với $Y = X^2 - 3$?

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.2.4. Kỳ vọng của hàm của biến ngẫu nhiên

VD 17. Cho BNN X có $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}, & x \in [1; 2] \\ 0, & x \notin [1; 2]. \end{cases}$
Tính EY với $Y = X^5 - \frac{2}{X}$.

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.3. PHƯƠNG SAI

3.3.1. Định nghĩa

Phương sai của BNN X , ký hiệu $VarX$ hay $D(X)$, là một **số thực không âm** được xác định bởi

$$VarX = E(X - EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2$$

- Nếu BNN X là rời rạc và $P(X = x_i) = p_i$ thì

$$VarX = \sum_i x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum_i x_i \cdot p_i \right)^2$$

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.3. PHƯƠNG SAI

3.3.1. Định nghĩa

- Nếu BNN X là liên tục và có hàm mật độ $f(x)$ thì

$$VarX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \right)^2$$

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.3. PHƯƠNG SAI

3.3.1. Định nghĩa

VD 18. Cho BNN X có bảng phân phối xác suất

X	1	2	3
P	0,2	0,7	0,1

Ta có:

$$\begin{aligned} VarX &= (1^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,7 + 3^2 \cdot 0,1) \\ &\quad - (1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,7 + 3 \cdot 0,1)^2 = 0,29. \end{aligned}$$

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.3. PHƯƠNG SAI

3.3.1. Định nghĩa

VD 19. Tính phương sai của X , biết hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x^2 + 2x), & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1]. \end{cases}$$

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.3. PHƯƠNG SAI

3.3.1. Định nghĩa

VD 20. BNN X có $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - x^2), & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

Tính phương sai của Y , cho biết $Y = 2X^2$.

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.3. PHƯƠNG SAI

3.3.2. Tính chất của Phương sai

- 1) $VarC = 0, C \in \mathbb{R};$
- 2) $Var(CX) = C^2.VarX;$
- 3) $Var(X \pm Y) = VarX + VarY$ nếu X và Y độc lập.

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.3.3. Ý nghĩa của Phương sai

- $(X - EX)^2$ là **biên phương sai biệt** giữa giá trị của X so với trung bình của nó. Và phương sai là trung bình của sai biệt này, nên phương sai cho ta hình ảnh về **sự phân tán** của các số liệu: phương sai càng nhỏ thì số liệu càng tập trung xung quanh trung bình của chúng.

Bài 3. Tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên

3.3.3. Ý nghĩa của Phương sai

- Trong kỹ thuật, phương sai đặc trưng cho độ sai số của thiết bị. Trong kinh doanh, phương sai đặc trưng cho độ rủi ro đầu tư.
- Do đơn vị đo của $VarX$ bằng bình phương đơn vị đo của X nên để so sánh được với các đặc trưng khác, người ta đưa vào khái niệm **độ lệch tiêu chuẩn** là

$$\sigma = \sqrt{VarX}$$
