

THỐNG KÊ SUY DIỄN

Chương 3

KIỂM ĐỊNH KHÔNG THAM SỐ

1. Những vấn đề chung
2. Kiểm định Wilcoxon
3. Kiểm định Mann – Whitney
4. Kiểm định Kruskal – Wallis
5. Kiểm định Chi bình phương

THỐNG KÊ SUY DIỄN	CHƯƠNG 3. KIỂM ĐỊNH KHÔNG THAM SỐ	1
-------------------	-----------------------------------	---

1. Những vấn đề chung.

a) Khái niệm.

Khi biến ngẫu nhiên quan tâm của tổng thể **không có phân phối thường (chuẩn)** hoặc là dữ liệu định tính mã hóa → **không thể tính các tham số** đặc trưng trung bình (ki vọng), tỉ lệ, độ lệch chuẩn, ..v.v.. → kiểm định không tham số, nhưng bản chất không mạnh bằng kiểm định tham số.

THỐNG KÊ SUY DIỄN	CHƯƠNG 3. KIỂM ĐỊNH KHÔNG THAM SỐ	2
-------------------	-----------------------------------	---

1. Những vấn đề chung.

b) Quy tắc xếp hạng.

- Theo thứ tự tăng dần, những giá trị bằng nhau được xếp **đồng hạng trung bình**.
- Xếp hạng chung bộ mẫu, tổng hạng tính riêng từng mẫu.

THỐNG KÊ SUY DIỄN	CHƯƠNG 3. KIỂM ĐỊNH KHÔNG THAM SỐ	3
-------------------	-----------------------------------	---

2. Kiểm định Wilcoxon.

a) Vai trò.

Kiểm định biến quan tâm của hai tổng thể sử dụng

hai mẫu phối cặp.

b) Giả thuyết không H_0 .

- Hai phía: $X_A = X_B$;
- Một phía: $X_A \geq X_B$; $X_A \leq X_B$

2. Kiểm định Wilcoxon.

c) Xếp hạng:

- Tính các chênh lệch từng cặp cá thể $d_i = a_i - b_i$.

- Xếp hạng giá trị tuyệt đối các chênh lệch $|d_i|$, bỏ qua các chênh lệch bằng không.

- Tính tổng hạng riêng cho chênh lệch dương R^+ và âm R^- .

n: tổng số cá thể tham gia xếp hạng.

2. Kiểm định Wilcoxon.

d) Giá trị tới hạn:

• Trường hợp 1: $n \leq 20$ (mẫu nhỏ) $\rightarrow$ Bảng tra phân vị **Wilcoxon**:

Hai phía: $W(\alpha/2;n)$; Một phía: $W(\alpha;n)$

• Trường hợp 2: $n > 20$ (mẫu lớn) $\rightarrow$ Bảng tra phân vị thường (chuẩn) hàm **Laplace**:

Hai phía: $Z_{\alpha/2}$; Một phía: Z_{α}

2. Kiểm định Wilcoxon.

e) Giá trị kiểm định:

$$W = \min\{R^+; R^-\}$$

Khi $n > 20$, xấp xỉ W thành phân phối chuẩn tắc Z

- nếu sau:
- Trung bình giá: $\mu = \frac{n.(n+1)}{4}$
 - Phương sai giá: $\sigma^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{24}$
- W xấp xỉ giá trị kiểm định: $Z = \frac{W - \mu}{\sigma}$

2. Kiểm định Wilcoxon.

f) Quyết định: Giả thuyết không bị **bác bỏ** khi:

- Trường hợp 1: $n \leq 20$ (mẫu nhỏ): $W \leq W(\alpha)$
- Trường hợp 2: $n > 20$ (mẫu lớn) : $|Z| > Z(\alpha)$

2. Kiểm định Wilcoxon.

VD1. Mẫu 9 khách hàng được chọn ngẫu nhiên và yêu cầu họ cho biết sở thích về 2 loại kem đánh răng A và B khác nhau thông qua thang điểm từ 1 đến 5, kết quả như sau:

Khách hàng	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Kem đánh răng A	4	5	2	3	3	1	3	2	2
Kem đánh răng B	3	5	5	2	5	5	3	5	5

Kem đánh răng B là loại mới đưa ra thị trường. Với mức ý nghĩa 5%:

- a) Có sự khác biệt về sở thích của khách hàng đối với A và B hay không?
- b) Có thể nói rằng kem B được ưa chuộng hơn không?

2. Kiểm định Wilcoxon.

VD2. Một công ty sản xuất dầu gội đầu P muốn kiểm định có sự khác biệt giữa trước và sau một chiến dịch quảng cáo sản phẩm. Khảo sát một mẫu gồm 50 người cho kết quả đánh giá, sau khi tính toán các chênh lệch (sau trừ trước) và xếp hạng, được tổng hạng dương là 625 và tổng hạng âm là 800. Thực hiện kiểm định Wilcoxon với mức ý nghĩa 5% xét xem khách hàng có biết đến sản phẩm dầu gội đầu P nhiều hơn trước hay không?

3. Kiểm định Mann - Whitney.

- a) Vai trò.
- Kiểm định biến quan tâm của hai tổng thể sử dụng **hai mẫu độc lập**.
- b) Giả thuyết không H_0 .
- Hai phía: $X_A = X_B$;
 - Một phía: $X_A \geq X_B$; $X_A \leq X_B$

3. Kiểm định Mann - Whitney.

- c) Xếp hạng.
- Xếp hạng tất cả cá thể hai mẫu. Tính tổng hạng riêng hai mẫu, kí hiệu R_A, R_B .
- Gọi n_A, n_B là cỡ hai mẫu n là cỡ bộ mẫu
- $\rightarrow n = n_A + n_B$
- Gọi R là tổng hạng bộ mẫu, ta có:
- $$R = R_A + R_B = \frac{n.(n+1)}{2}$$

3. Kiểm định Mann - Whitney.

- d) Giá trị tới hạn:
- Trường hợp 1: n_A và $n_B \leq 20$ (mẫu nhỏ) $\rightarrow$ Bảng tra phân vị **Mann – Whitney** (2đuôi):
Hai phía: $U(\alpha;n_A;n_B)$; Một phía: $U(2\alpha;n_A;n_B)$
 - Trường hợp 2: n_A or $n_B > 20$ (mẫu lớn) $\rightarrow$ Bảng tra phân vị thường (chuẩn) hàm **Laplace**:
Hai phía: $Z_{\alpha/2}$; Một phía: Z_{α}

3. Kiểm định Mann - Whitney.

- e) Giá trị kiểm định:
- $$U_A = n_A \cdot n_B + \frac{n_A \cdot (n_A + 1)}{2} - R_A; U_B = n_A \cdot n_B + \frac{n_B \cdot (n_B + 1)}{2} - R_B$$
- $\rightarrow U = \min\{U_A ; U_B\}$
- Nếu n_A or $n_B > 20$ (mẫu lớn), xấp xỉ U thành phân phối chuẩn tắc Z như sau:

3. Kiểm định Mann - Whitney.

- e) Giá trị kiểm định:
- Trung bình giá: $\mu = \frac{n_A \cdot n_B}{2}$
 - Phương sai giá: $\sigma^2 = \frac{n_A \cdot n_B \cdot (n_A + n_B + 1)}{12}$
- $\rightarrow U$ xấp xỉ giá trị kiểm định: $Z = \frac{U - \mu}{\sigma}$

3. Kiểm định Mann - Whitney.

- f) Quyết định: Giả thuyết không H_0 bị **bác bỏ** khi:
- Trường hợp 1: n_A và $n_B \leq 20$ (mẫu nhỏ): $U \leq U(\alpha)$
 - Trường hợp 2: n_A or $n_B > 20$ (mẫu lớn): $|Z| > Z(\alpha)$

3. Kiểm định Mann - Whitney.

Ví dụ. Nghiên cứu về yêu cầu lương khởi điểm của sinh viên mới tốt nghiệp của hai trường đại học A và B, chọn ngẫu nhiên 12 sinh viên mới tốt nghiệp để hỏi ý kiến, kết quả cho trong bảng phía dưới. Dữ liệu không có phân phối chuẩn. Với mức ý nghĩa 5%, hãy so sánh về mức lương khởi điểm mong muốn của hai trường có khác nhau hay không?

3. Kiểm định Mann - Whitney.

Trường A	Trường B
3.0	2.2
2.7	2.9
2.6	2.15
2.8	2.3
2.4	2.2
	2.5
	2.1

4. Kiểm định Kruskal - Wallis.

- a) Vai trò.
Kiểm định sự bằng nhau biến được quan tâm của số nhiều tổng thể.
- b) Giả thuyết không H_0 . $X_1 = X_2 = \dots = X_k$;
- c) Xếp hạng.
Xếp hạng chung bộ mẫu và tính tổng hạng riêng từng mẫu, kí hiệu R_i .
Gọi R là tổng hạng bộ mẫu, n là cỡ bộ mẫu:

4. Kiểm định Kruskal - Wallis.

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_k = \frac{n.(n+1)}{2}$$

- d) Giá trị kiểm định.
$$W = \frac{12}{n.(n+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$
- e) Giá trị tới hạn. Phân vị Chi bình phương $\chi^2_{(\alpha;k-1)}$
- f) Quyết định. Giả thuyết không H_0 bị bác bỏ khi:
$$W > \chi^2_{(\alpha;k-1)}$$

4. Kiểm định Kruskal - Wallis.

VD. Có điểm trung bình học tập của ba nhóm sinh viên trong bảng sau. Giả sử dữ liệu không có phân phối chuẩn, có thể kết luận điểm học tập trung của ba nhóm này khác nhau không với mức ý nghĩa 5%?

Thời gian làm thêm ít	Thời gian làm thêm vừa	Thời gian làm thêm nhiều
6.3	7.2	6.3
7.0	6.6	5.8
6.5	6.1	6.0
6.6	5.8	5.5
7.3	6.8	5.3
6.9	7.1	6.5
6.4	5.9	5.4
		6.2

Tương đồng giữa những kiểm định không tham số với một số kiểm định có tham số

KIỂM ĐỊNH	KHÔNG THAM SỐ Biến kế không có phân phối thường (chuẩn)	THAM SỐ Biến kế có phân phối thường (chuẩn)
Hai tổng thể mẫu cặp	Kiểm định Wilcoxon	Kiểm định hai trung bình tổng thể
Hai tổng thể mẫu độc lập	Kiểm định Mann – Whitney	
Nhiều tổng thể	Kiểm định Kruskal – Wallis	ANOVA
Tương quan	Kiểm định Spearman	Kiểm định Pearman

5. Kiểm định Chi bình phương.

5.1. Kiểm định mối liên hệ (sự độc lập) hai yếu tố định tính

5.2. Kiểm định quy luật phân phối xác suất

5.1. Kiểm định mối liên hệ (sự độc lập) hai yếu tố định tính

- Giả sử yếu tố X có m giá trị, yếu tố Y có n giá trị.
Ta gọi:
- i là chỉ số giá trị thứ i của yếu tố X $\rightarrow i = 1, 2, \dots, m$;
 - j là chỉ số giá trị thứ j của yếu tố Y $\rightarrow j = 1, 2, \dots, n$;
 - O_{ij} là tần số **mẫu** của giá trị thứ i của yếu tố X và giá trị thứ j của yếu tố Y;
 - R_i là tần số **mẫu** giá trị thứ i của yếu tố X;
 - C_j là tần số **mẫu** giá trị thứ j của yếu tố Y.

5.1. Kiểm định mối liên hệ (sự độc lập) hai yếu tố định tính

Ta có:
$$R_i = \sum_{j=1}^n O_{ij}; C_j = \sum_{i=1}^m O_{ij}$$

a) Giả thuyết không H_0 :

Không có mối liên hệ giữa hai yếu tố

b) Tính các tần số tổng thể (lý thuyết):

$$E_{ij} = \frac{R_i \cdot C_j}{n}$$

5.1. Kiểm định mối liên hệ (sự độc lập) hai yếu tố định tính

c) Từ mức ý nghĩa, tra giá trị tới hạn $\rightarrow$ phân vị Chi bình phương $\chi^2_{[\alpha; m-1, n-1]}$

d) Giá trị kiểm định:
$$\chi^2 = \sum \frac{O_{ij} - E_{ij}}{E_{ij}}^2, m.n \text{ số hạng}$$

e) Quyết định:

- $\chi^2 > \chi^2_{[\alpha; m-1, n-1]}$: bác bỏ giả thuyết không H_0
- $\chi^2 \leq \chi^2_{[\alpha; m-1, n-1]}$: chấp nhận giả thuyết không H_0

5.1. Kiểm định mối liên hệ (sự độc lập) hai yếu tố định tính

Ví dụ. Kiểm định mối liên hệ giữa kết quả học tập và thời gian tự học với mẫu ngẫu nhiên của 200 sinh viên sau ở mức ý nghĩa 5%:

Kết quả học tập	Thời gian tự học		
	Ít	Vừa	Nhiều
Trung bình	70	25	5
TB khá	15	35	10
Khá – Giỏi	5	10	25

5.2. Kiểm định quy luật phân phối xác suất

- a) Giả thuyết không H_0 :
- Biến NN tổng thể có quy luật phân phối xác suất A**
- b) Từ mẫu, tính các tham số mẫu làm tham số đặc trưng cho quy luật phân phối.
- c) Tính xác suất lý thuyết $p_i = P(X = x_i)$, từ đó suy ra tần số lý thuyết E_i cho từng giá trị x_i trong mẫu.
- Nhắc lại công thức tính xác suất các quy luật phân phối xác suất thông thường:
- Phân phối Nhị thức $X \sim B(n;p)$:
- $$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot 1 - p^{n-k}$$

5.2. Kiểm định quy luật phân phối xác suất

- Nhắc lại công thức tính xác suất các quy luật phân phối xác suất thông thường:
- Phân phối siêu bội $X \sim H(N;M;n)$:
- $$P(X = k) = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$
- Phân phối Poisson $X \sim P(\lambda)$: $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$
- Phân phối thường (chuẩn) $X \sim N(\mu; \sigma^2)$:
- $$P(a < X < b) = \varphi(b) - \varphi(a)$$
- với $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} .dt$: hàm Laplace

5.1. Kiểm định mối liên hệ (sự độc lập) hai yếu tố định tính

- d) Từ mức ý nghĩa, tra giá trị tới hạn $\rightarrow$ phân vị Chi bình phương $\chi^2_{[\alpha; m-1, n-1]}$
- e) Giá trị kiểm định:
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{O_i - E_i}{E_i}$$

O_i : tần số giá trị x_i .
- f) Quyết định:
- + $\chi^2 > \chi^2_{[\alpha; m-1, n-1]}$: bác bỏ giả thuyết không H_0
- + $\chi^2 \leq \chi^2_{[\alpha; m-1, n-1]}$: chấp nhận giả thuyết không H_0

5.2. Kiểm định quy luật phân phối xác suất

VD 1. Một nhà quản lý có dữ liệu mẫu số vụ tai nạn công nghiệp trong tuần sau:

Số tai nạn	0	1	2	3	4	5	6
Số tuần	10	20	40	18	8	0	4

Ông ta cho rằng số vụ tai nạn trên tuân theo luật phân phối Poisson. Hãy kiểm định với mức ý nghĩa 5%.

5.2. Kiểm định quy luật phân phối xác suất

VD 2. Một dữ liệu mẫu ngẫu nhiên số tiền chi mua sắm của khách du lịch quốc tế trong một ngày lưu trú tại Việt Nam như sau:

Mức chi (USD)	Số người
< 30	21
30 – 40	27
40 – 50	26
50 – 60	30
60 – 70	26
≥ 70	20

5.2. Kiểm định quy luật phân phối xác suất

Một nhóm nghiên cứu nói rằng số tiền mua sắm du lịch này tuân theo quy luật phân phối thường. Với mức ý nghĩa 5%, hãy kiểm định ý kiến này.
