

CHƯƠNG 3. BÀI TOÁN VẬN TẢI

1 Bài toán cân bằng

2 Phương án cực biên

3 Thuật toán thế vị

4 Một số trường hợp đặc biệt

1. BÀI TOÁN VẬN TẢI CÂN BẰNG THU PHÁT

1.1. Lập mô hình bài toán:

Có một loại hàng cần được chuyên chở từ hai kho (trạm phát) P_1 và P_2 tới ba nơi tiêu thụ (trạm thu) T_1 , T_2 , T_3 . Lượng hàng có ở hai kho và lượng hàng cần ở ba nơi tiêu thụ cũng như số tiền vận chuyển một đơn vị hàng từ mỗi kho đến các nơi tiêu thụ được cho ở bảng sau:

1. BÀI TOÁN VẬN TẢI CÂN BẰNG THU PHÁT

THU PHÁT	T_1 35 tấn	T_2 25 tấn	T_3 45 tấn
P_1 30 tấn	5	2	3
P_2 75 tấn	2	1	1

Tìm phương án vận chuyển thỏa yêu cầu về thu phát sao cho chi phí vận chuyển bé nhất.

1. BÀI TOÁN VẬN TẢI CÂN BẰNG THU PHÁT

1.2. Bài toán cân bằng:

Giả sử có **m** kho là nơi phát hay cung cấp hàng hoá, kho thứ *i* chứa *a_i* đơn vị hàng hoá (*i* = 1,2,...,m); có **n** nơi tiêu thụ hay nhận hàng hoá, nơi nhận thứ *j* cần *b_j* đơn vị hàng hoá (*j* = 1,2,...,n).

Giá tiền hay cước phí vận chuyển một đơn vị hàng hóa từ kho thứ *i* đến nơi nhận thứ *j* là *c_{ij}* đơn vị tiền tệ.

Bài toán được gọi là cân bằng nếu tổng lượng phát = tổng lượng thu: $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

1. BÀI TOÁN VẬN TẢI CÂN BẰNG THU PHÁT

Bài toán vận tải thường cho dưới dạng bảng sau:

Thu Phát	<i>b₁</i>	<i>b₂</i>	...	<i>b_j</i>		<i>b_n</i>
<i>a₁</i>	<i>c₁₁</i>	<i>c₁₂</i>		<i>c_{1j}</i>		<i>c_{1n}</i>
<i>a₂</i>	<i>c₂₁</i>	<i>c₂₂</i>		<i>c_{2j}</i>		<i>c_{2n}</i>
.....						
<i>a_i</i>	<i>c_{i1}</i>	<i>c_{i2}</i>		<i>c_{ij}</i>		<i>c_{in}</i>
.....						
<i>a_m</i>	<i>c_{m1}</i>	<i>c_{m2}</i>		<i>c_{mj}</i>		<i>c_{mn}</i>

Yêu cầu bài toán: tìm cách phân bổ lượng hàng vận chuyển ***x_{ij}*** từ trạm phát *i* đến trạm thu *j* thỏa:

1. BÀI TOÁN VẬN TẢI CÂN BẰNG THU PHÁT

Tổng chi phí vận chuyển thấp nhất

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \tag{1.2}$$

Tổng lượng hàng phát đi

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m}) \tag{1.3}$$

Tổng lượng hàng nhận về

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n}) \tag{1.4}$$

Một **phương án** bài toán (bộ *x_{ij}* thỏa 1.3 và 1.4) có dạng ma trận nên cũng gọi là **ma trận phương án**.

1. BÀI TOÁN VẬN TẢI CÂN BẰNG THU PHÁT

Ví dụ: Xét lại bài toán vận tải đã biết ở trên

THU PHÁT	T ₁ 35 tấn	T ₂ 25 tấn	T ₃ 45 tấn
P ₁ 30 tấn	5	2	3
P ₂ 75 tấn	2	1	1

→ bài toán vận tải cân bằng thu phát

1. BÀI TOÁN VẬN TẢI CÂN BẰNG THU PHÁT

1.3. Tính chất:

- Bài toán có tập phương án khác rỗng và luôn có phương án tối ưu.
- Ma trận cước phí có hạng = $m + n - 1$.

2. PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN

2.1. Ô chọn, ô loại:

Ta viết $(i ; j)$ là ô dòng **i** và cột **j** của bảng.
Những ô trong bảng có lượng hàng phân phối $x_{ij} > 0$ gọi là ô **chọn**. Ngược lại, những ô có lượng hàng phân phối $x_{ij} = 0$ gọi là ô **loại**.

2. PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN

2.2. Tập ô đường đi:

Tập ô đường đi (gọi tắt “đường đi”) là tập hợp các ô trong bảng thỏa có một và chỉ một ô khác cũng thuộc “đường đi” nằm trên cùng dòng hoặc cùng cột với nó, gọi là hai ô liên tiếp.

Nhân xét: Trên một dòng hay cột của “đường đi” có không quá hai ô.

2. PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN

Ví dụ 1.

•		•		
		•	•	
	•		•	

2. PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN

Ví dụ 2.

•			•	
		•		•
	•			

2. PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN

2.3. Chu trình:

Một đường đi khép kín được gọi là một chu trình.

Ví dụ 1.

•		•		
		•	•	
•			•	

2. PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN

Ví dụ 2.

•	•			
•		•		
		•	•	
	•		•	

2. PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN

2.4. Tính chất:

- Xét bảng vận tải có m dòng và n cột.
- a) Tập ô chọn không là chu trình có không quá $(m + n - 1)$ ô.
 - b) Tập ô chọn không là chu trình có đủ $(m + n - 1)$ ô. Ta thêm vào tập ô này một **ô loại** bất kì thì ô này cùng với một số ô chọn đã có sẽ tạo thành chu trình duy nhất đi qua nó.

2. PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN

Ví dụ 2.4. Xét bài toán vận tải có 3 dòng, 4 cột với một phương án có $3 + 4 - 1 = 6$ ô chọn:

•			•
•		•	
	•	•	

2. PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN

2.5. Phương án cực biên:

Phương án **cực biên** trong bài toán vận tải là phương án có tập ô chọn của nó **không chứa** chu trình.

2. PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN

Ví dụ 2.4. Xét phương án trong bài toán vận tải cho bởi bảng sau:

	30	40	50	60
80	1 30	5	7	2 50
45	5	7	4 35	9 10
55	12	2 40	3 15	6

2. PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN

2.6. Phương pháp thành lập

2.6.1. Nguyên lý phân bổ tối đa ô chọn.

Phân bổ lượng hàng nhiều nhất có thể cho ô đã được chọn $\rightarrow x_{ij} = \min\{a_i ; b_j\}$, có hai trường hợp sau:

- ❑ Trạm thu nhận đủ hàng thì tạm xoá trạm này và ghi nhớ lượng hàng thừa ở nơi phát.
- ❑ Trạm phát chuyển hết hàng thì tạm xóa trạm phát này và ghi nhớ lượng hàng còn thiếu ở nơi thu.

2. PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN

2.6. Phương pháp thành lập

2.6.2. Nguyên tắc chọn ô phân bổ.

Ba cách:

- Góc Tây Bắc: từ trên xuống dưới và từ trái qua phải $\rightarrow$ ô đầu tiên (1;1) $\rightarrow$ dễ nhớ nhưng phương án tìm được kém (f cách xa f tối ưu)
- Ô có cước phí nhỏ nhất $\rightarrow$ dễ nhớ, phương án vừa
- Ô chọn Fogel $\rightarrow$ khó nhưng phương án tìm được tốt (f rất gần f tối ưu), thực hiện như sau:

2. PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN

- + Bước 1: Tính hiệu số giữa hai ô có cước phí nhỏ nhất của mỗi dòng và mỗi cột của ma trận cước phí.
- + Bước 2: Ô được chọn là có ô cước phí nhỏ nhất của dòng hay cột có hiệu số này lớn nhất.

Hai nguyên tắc này phối hợp xen kẽ nhau và lặp lại đến khi ta được phương án hoàn chỉnh.

2. PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN

Ví dụ 2.6. Thành lập một phương án cực biên của bài toán vận tải sau:

$i \backslash j$	30	40	50	60
80	1	5	7	2
45	5	7	4	9
55	12	2	3	6

3. THUẬT TOÁN THỂ VỊ

BUỐC 1: Thành lập phương án cực biên ban đầu (xuất phát) theo **Nguyên lý phân bố tối đa** với các ô chọn phân bố bằng các phương pháp: **góc Tây Bắc, cước phí thấp nhất, Fogel,...**

- BUỐC 2:** Xét dấu hiệu tối ưu của phương án.
- Tìm các biệt số dòng u_i và biệt số cột v_j của phương án bằng cách giải hệ phương trình ô chọn:

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

3. THUẬT TOÁN THỂ VỊ

BUỐC 2: Xét dấu hiệu tối ưu của phương án.
Hệ này chứa $(m + n)$ ẩn nhưng chỉ có nhiều nhất $(m + n - 1)$ phương trình $\rightarrow$ có một ẩn được chọn trước làm tham số $\rightarrow$ **kĩ thuật giải:** cho ẩn mà hàng/cột của nó có nhiều ô chọn nhất **bằng 0**.

- Tính các ước lượng cho các ô loại:
- $$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$
- Nếu mọi $\Delta \leq 0 \rightarrow$ phương án đang xét tối ưu.
Ngược lại, nếu có $\Delta > 0 \rightarrow$ phương án không tối ưu $\rightarrow$ **Bước 3**

3. THUẬT TOÁN THỂ VỊ

Ví dụ 3.1. Xét khả năng tối ưu của phương án trong bảng vận tải sau:

<i>i \ j</i>	30	40	50	60
80	1 30	5	7	2 50
45	5	7	4 35	9 10
55	12	2 40	3 15	6

3. THUẬT TOÁN THỂ VỊ

Ví dụ 3.2. Xét khả năng tối ưu của phương án trong bảng vận tải sau:

<i>i \ j</i>	30	40	50	60
80	1 30	5	7	2 50
45	5	7	4 45	9
55	12	2 40	3 5	6 10

3. THUẬT TOÁN THỂ VỊ

Ví dụ 3.3. Xét khả năng tối ưu của phương án trong bảng vận tải sau :

<i>i \ j</i>	30	40	50	60
80	1 20	5	7	2 60
45	5 10	7	4 35	9
55	12	2 40	3 15	6

3. THUẬT TOÁN THỂ VỊ

- BUỚC 3:** Cải tiến phương án cực biên mới tốt hơn.
- Đưa ô loại có ước lượng Δ lớn nhất bổ sung thành ô chọn của phương án → ô này kết hợp với một số ô chọn đã có trong phương án tạo thành chu trình **K** duy nhất đi qua nó.

➤ Đánh dấu âm/dương +/- xen kẽ cho chu trình **K** này. Bắt đầu từ ô chọn mới bổ sung mang dấu + đến hết. Sau đó chia chu trình **K** thành hai tập ô sau:

$K^+ = \{ \text{ô } (i ; j) \text{ mang dấu } + \}$ $K^- = \{ \text{ô } (i ; j) \text{ mang dấu } - \}$

3. THUẬT TOÁN THỂ VỊ

- BUỚC 3:** Cải tiến phương án cực biên mới tốt hơn.
- Xác định lượng hàng điều chỉnh:

$q = \min\{x_{ij}, \text{ với } (i ; j) \in K^-\}$

➤ Xây dựng phương án cực biên mới từ phương án cực biên cũ đang có như sau:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + q; (i, j) \in K^+ \\ x_{ij} - q; (i, j) \in K^- \\ x_{ij} \quad ; (i, j) \notin K \end{cases}$$

3. THUẬT TOÁN THỂ VỊ

Ví dụ 3.5. Từ phương án này, hãy tìm phương án tối ưu của bài toán.

<i>i \ j</i>	30	40	50	60
	1	5	7	2
80	1	5	7	2
	30			50
45	5	7	4	9
			35	10
55	12	2	3	6
		40	15	

3. THUẬT TOÁN THỂ VỊ

Ví dụ 3.6. Từ phương án này, hãy tìm phương án tối ưu của bài toán.

	30	40	50	60
80	1 30	5	7	2 50
45	5	7	4 45	9
55	12	2 40	3 5	6 10

3. THUẬT TOÁN THỂ VỊ

Ví dụ 3.7. Từ phương án này, hãy tìm phương án tối ưu của bài toán.

$i \backslash j$	30	40	50	60
80	1 30	5 40	7 10	2
45	5	7	4 40	9 5
55	12	2	3	6 55

3. THUẬT TOÁN THỂ VỊ

Ví dụ 3.8. Giải bài toán vận tải với phương án cực biên ban đầu được cho trong bảng sau:

	30	50	80	40
90	3 30	2	5 20	1 40
70	4	1 50	3 20	6
40	7	4	2 40	5

3. THUẬT TOÁN THỂ VỊ

Ví dụ 3.9. Giải bài toán vận tải:

	50	40	70
80	5	5	12
20	7	9	11
60	4	2	3

4. MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT

4.1. Phương án suy biến.

Phương án suy biến là phương án có ít hơn $(m + n - 1)$ ô chọn.

Cách giải bài toán vận tải có phương án cực biên ban đầu suy biến: bổ sung thêm các ô loại bất kì của bảng làm **ô chọn giả** (lượng hàng phân bổ $x_{ij} = 0$) cho đủ $(m + n - 1)$ **ô chọn** và đảm bảo không tạo thành chu trình → phương án cực biên không suy biến → tiếp tục giải bằng thuật toán thể vị.

4. MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT

Ví dụ 4.1.1. Giải bài toán bảng vận tải từ phương án vận chuyển ban đầu sau:

$i \backslash j$	40	100	60	50
80	1 40	2	4 40	3
70	2	4	5 20	1 50
100	4	1 100	2	5

4. MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT

Ví dụ 4.1.2. Giải bài toán vận tải với phương án ban đầu sau:

	25	25	10
10	5	3	5 10
30	7 25	6 5	8
20	3	2 20	2

4. MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT

4.2. Bài toán vận tải không cân bằng thu phát

Hướng giải quyết: Thêm vào các trạm phát/thu giả có cước phí = 0 để chuyển bài toán thành **cân bằng**.

- Trường hợp phát > thu → thêm trạm **thu giả** b_{n+1} với lượng hàng = $\Sigma\text{phát} - \Sigma\text{thu}$
- Trường hợp phát < thu → thêm trạm **phát giả** a_{m+1} với lượng hàng = $\Sigma\text{thu} - \Sigma\text{phát}$

4. MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT

Ví dụ 4.2. Giải bài toán vận tải không cân bằng thu phát cho bởi bảng vận tải sau:

j	40	50	80
i			
90	6	1	1
40	5	7	4
70	4	11	3

4. MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT

4.3. Bài toán có ô cấm

Vì một lí do nào đó, có một nơi phát không thể chuyên chở hàng đến một nơi nhận được.

Phương pháp giải: xóa cấm và gán cước phí giả = ∞ . Tiếp tục giải bài toán bằng thuật toán thế vị đã học.

4. MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT

Ví dụ 4.3. Giải bài toán vận tải có ô cấm cho bởi bảng sau:

$i \backslash j$	100	65	95	40
80	6	5	11	10
70	10		5	7
150	9	8	7	

4. MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT

4.4. Bài toán lợi nhuận lớn nhất

Bài toán vẫn giải bằng thuật toán thế vị như trên nhưng với nguyên tắc **chọn ô chọn** ngược lại: **ô chọn** là ô có lợi nhuận lớn nhất.

4. MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT

Ví dụ 4.4. Giải bài toán vận tải lợi nhuận lớn nhất sau:

<i>i \ j</i> <i>j</i> <i>i</i>	70	55	85	60
90	6	5	11	10
80	10	6	5	7
100	9	8	7	4