

CHƯƠNG 2. BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

- 1

Nhu cầu & ý nghĩa
- 2

Thành lập bài toán
- 3

Mối quan hệ

§1. NHU CẦU & Ý NGHĨA

1.1. Lập mô hình toán:

Ví dụ: Một xí nghiệp sản xuất ba loại giấy A1, A2, A3 từ hai loại nguyên liệu chính có sẵn 5000m³ gỗ và 90 tấn axit. Mức tiêu hao nguyên liệu trong sản xuất và giá bán thành phẩm cho trong bảng sau:

§1. NHU CẦU & Ý NGHĨA

Nguyên liệu	Sản phẩm		
	A1	A2	A3
Gỗ (m ³)	1	3	2
Axit (kg)	20	30	24
Giá bán (triệu/tấn)	9	12	10

a) Lập mô hình tính toán kế hoạch sản xuất sao cho tổng số tiền bán sản phẩm thu được nhiều nhất.

§1. NHU CẦU & Ý NGHĨA

b) Giả sử có công ty B muốn mua lại toàn bộ nguyên liệu trên. Có thể xác định giá mua – bán nguyên liệu thế nào để xí nghiệp A vẫn thu được số tiền nhiều nhất như bán thành phẩm và công ty B mua được với số tiền rẻ nhất không? Nếu có thể, hãy lập mô hình để xác định giá mua – bán thỏa yêu cầu.

§1. NHU CẦU & Ý NGHĨA

Ý nghĩa:

Khi bài toán có số lượng ràng buộc đại số nhiều hơn số ẩn, việc giải bài toán đối ngẫu, từ đó suy ra nghiệm bài toán gốc (hoặc ngược lại) sẽ dễ dàng hơn khi giải trực tiếp bài toán gốc(đối ngẫu). Cách giải này còn được gọi **phương pháp đối ngẫu**.

§2. THÀNH LẬP BÀI TOÁN

I. Ẩn, hàm mục tiêu và các hệ số.

- ❖ Ràng buộc đại số thứ *i* của bài này tương ứng ẩn thứ *i* của bài kia và ngược lại → Số lượng ẩn bài này = số lượng ràng buộc đại số bài kia và ngược lại.
- ❖ Hàm mục tiêu: → **min/max** ⇔ → **max/min**
- ❖ Hệ số hàm mục tiêu của bài này ⇔ hệ số tự do trong các ràng buộc đại số của bài kia và ngược lại.
- ❖ Ma trận hệ số các ẩn trong hệ ràng buộc đại số hai bài toán là hai ma trận chuyển vị của nhau.

§2. THÀNH LẬP BÀI TOÁN

II. Quy tắc về dấu của các ràng buộc.

- ❖ Dấu ràng buộc **đại số** bài toán gốc quyết định dấu ràng buộc **biến** tương ứng bài toán đối ngẫu.
 - ❖ Dấu ràng buộc **biến** bài toán gốc quyết định dấu ràng buộc **đại số** tương ứng bài toán đối ngẫu.
- Quy tắc quyết định chi tiết theo bảng sau:

§2. THÀNH LẬP BÀI TOÁN

GỐC Min		→		ĐỐI NGẪU Max	
Ràng buộc đại số	$\geq$	≥ 0		Ràng buộc biến	
	$\leq$	≤ 0			
	$=$	Tùy ý			
Ràng buộc biến	≥ 0	$\leq$		Ràng buộc đại số	
	≤ 0	$\geq$			
	Tùy ý	$=$			
ĐỐI NGẪU Min		←		GỐC Max	

§2. THÀNH LẬP BÀI TOÁN

- ❖ Ghi nhớ:
- ❖ Bài toán max → min
 - Ràng buộc **đại số** → ràng buộc **biến**: **ngược dấu**
 - Ràng buộc **biến** → ràng buộc **đại số**: **cùng dấu**
- ❖ Bài toán min → max
 - Ràng buộc **đại số** → ràng buộc **biến**: **cùng dấu**
 - Ràng buộc **biến** → ràng buộc **đại số**: **ngược dấu**

§2. THÀNH LẬP BÀI TOÁN

Ví dụ 2.1:

Hãy thành lập bài toán đối ngẫu của bài toán sau

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 + 3x_2 + 4x_3 \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 19 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 24 \end{cases} \\ x_j &\geq 0; j = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

§2. THÀNH LẬP BÀI TOÁN

Ví dụ 2.2:

Hãy thành lập bài toán đối ngẫu của bài toán sau

$$\begin{aligned} g(Y) &= 30y_1 + 20y_2 + 26y_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} y_1 \leq 2 \\ -6y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 5 \\ y_2 \leq 4 \\ -2y_1 + \frac{1}{2}y_2 \leq 1 \\ -9y_1 + \frac{3}{2}y_2 + y_3 \leq -5 \\ y_3 \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

§3. MỐI QUAN HỆ

1. Định lý.

- ❖ Nếu cả hai bài toán gốc và đối ngẫu có tập phương án $\neq \emptyset$ thì cả hai bài toán đều có phương án tối ưu.
- ❖ Nếu một trong hai bài toán (gốc hoặc đối ngẫu) có phương án tối ưu thì bài toán còn lại cũng có phương án tối ưu và **giá trị tối ưu của hai hàm mục tiêu luôn bằng nhau.**

§3. MỐI QUAN HỆ

2. Định lý Độ lệch bù.

Xét cặp bài toán đối ngẫu (G) >< (Đ):

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &\leq b_i, i = \overline{1,m} \\ x_1; x_2; \dots; x_n \end{aligned} \right\} (G) >< (Đ) \left\{ \begin{aligned} g(y) &= c_0 + b_1y_1 + \dots + b_my_m \\ \sum_{i=1}^m a_{ji}y_i &\leq c_j, j = \overline{1,n} \\ y_1; y_2; \dots; y_m \end{aligned} \right.$$

§3. MỐI QUAN HỆ

2. Định lý Độ lệch bù.

Gọi $\alpha = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$ và $\beta = (\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_m)$ lần lượt là cặp phương án tối ưu của cặp bài toán (G) >< (Đ), khi đó chúng thỏa mãn hệ phương trình:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \alpha_j - b_i \right) \cdot \beta_i &= 0; i = \overline{1,m} \\ \left(\sum_{i=1}^m a_{ji} \cdot \beta_i - c_j \right) \cdot \alpha_j &= 0; j = \overline{1,n} \end{aligned} \right.$$

§3. MỐI QUAN HỆ

Ý nghĩa: tìm phương tối ưu của bài toán này khi có được phương án tối ưu của một bài toán kia và ngược lại.

- Kĩ thuật áp dụng (chiêu):**
- Giả sử có phương án tối ưu β của bài toán Đ, tìm phương án tối ưu α của bài toán G như sau:
- Bước 1: Có đủ mô hình hai bài toán.

§3. MỐI QUAN HỆ

Kĩ thuật áp dụng (chiều):

- Bước 2: Thay β vào hệ ràng buộc đại số của nó, những ràng buộc thỏa $\sum_{i=1}^m a_{ji} \cdot \beta_i \neq c_j \rightarrow$ thành phần tương ứng $\alpha_j = 0$
- Bước 3: Sử dụng các phương trình ràng buộc đại số $\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \alpha_j = b_i$ trong hệ ràng buộc của bài toán G tương ứng các thành phần $\beta_i \neq 0$ để giải thành phần $\alpha_i \neq 0$.

§3. MỐI QUAN HỆ

Ví dụ 2.3:

Cho bài toán Quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 0x_4 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 = 6 \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases} \quad (P)$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$

Bài toán có phương án tối ưu là $\bar{x} = (2, 4, 0, 0)$ và giá trị tối ưu là -6. Tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu của nó

ÔN TẬP

Ví dụ 2.5:

Cho bài toán

$$f(x) = 15x_1 + 19x_2 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 7 \end{cases}$$

$x_j \geq 0; j = \overline{1, 2}.$

Giải bài toán trên bằng cách chuyển về bài toán đối ngẫu của nó.

ÔN TẬP

Ví dụ 2.6:

Cho bài toán :

$$f = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 20 \\ x_1 + 7x_2 + 3x_3 \geq 25 \\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 \geq 30 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Xây dựng bài toán đối ngẫu của bài toán trên. Giải bài toán đối ngẫu và từ đó tìm phương án tối ưu của bài toán gốc.
